



TITLE:

# On a shadow system to the Gierer-Meinhardt System with a non-local term(Dynamics of functional equations and numerical simulation)

AUTHOR(S):

四ツ谷, 晶二

---

CITATION:

四ツ谷, 晶二. On a shadow system to the Gierer-Meinhardt System with a non-local term(Dynamics of functional equations and numerical simulation). 数理解析研究所講究録 2006, 1475: 149-154

ISSUE DATE:

2006-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/48193>

RIGHT:

# On a shadow system to the Gierer-Meinhardt System with a non-local term

龍谷大学 理工学部 四ツ谷 晶二  
Ryukoku University Shoji Yotsutani

この研究は、高市 英明 氏（兵庫大学）、および、高木 泉 氏（東北大学）との共同研究である。 Gierer-Meinhardt system ([1])

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta A - A + \frac{A^p}{H^q} + \sigma & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \tau \frac{\partial H}{\partial t} = D \Delta H - H + \frac{A^r}{H^s} & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \frac{\partial A}{\partial \nu} = \frac{\partial H}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial \Omega, \quad t > 0. \end{cases}$$

の Shadow System の典型例としてあらわれる、非局所非線形境界値問題

$$\begin{cases} du'' - u + u^2 + \sigma \int_0^1 u^2 dx = 0 & x \in (0,1), \\ u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0, \\ u'(x) > 0 & x \in (0,1). \end{cases} \quad (S)$$

を考える。ただし、 $u(x)$ は未知関数、 $d, \sigma$ は正值パラメータである。

この境界値問題の解の大域的構造は、 $\sigma = 0$ の場合はよく知られているが、 $\sigma > 0$ の場合は高木[3]の中に予想は与えられていたが、事実は未確認であった。

本講演では、Lou-Ni-Yotsutani[2]のアイデアを応用し、方程式(S)のすべての解を楕円関数を用いてあらわし、それに基づき解の大域的構造を報告する。

【定理 1】 方程式(S)のすべての解は、

$$\left\{ (u(x; d, k), \sigma(d, k)); \quad 0 < d < \frac{1}{4K(k)^2 \sqrt{k^4 - k^2 + 1}}, \quad 0 < k < 1 \right\}$$

であらわされる。ただし、

$$u(x; d, k) := \frac{\{1 - 4dK(k)^2(2k^2 - 1)\} - \{1 + 4dK(k)^2(k^2 - 2)\}k^2 \operatorname{sn}^2(K(k)x, k)}{2(1 - k^2 \operatorname{sn}^2(K(k)x, k))},$$

$$\sigma(d, k) := \frac{1 - 16d^2 K(k)^4 (k^4 - k^2 + 1)}{1 + 16d^2 K(k)^4 (k^4 - k^2 + 1) + 8dK(k)^2 (k^2 - 2) + 24dK(k)E(k)}.$$

なお,  $K(k)$  は第 1 種完全楕円積分,  $E(k)$  は第 2 種完全楕円積分,  $sn(\cdot; k)$  は母数  $k$  のヤコビの楕円関数である. すなわち,

$$K(k) := \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-kt^2)}}, \quad E(k) := \int_0^1 \sqrt{\frac{1-kt^2}{1-t^2}} dt, \quad sn^{-1}(w, k) := \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-kt^2)}}.$$

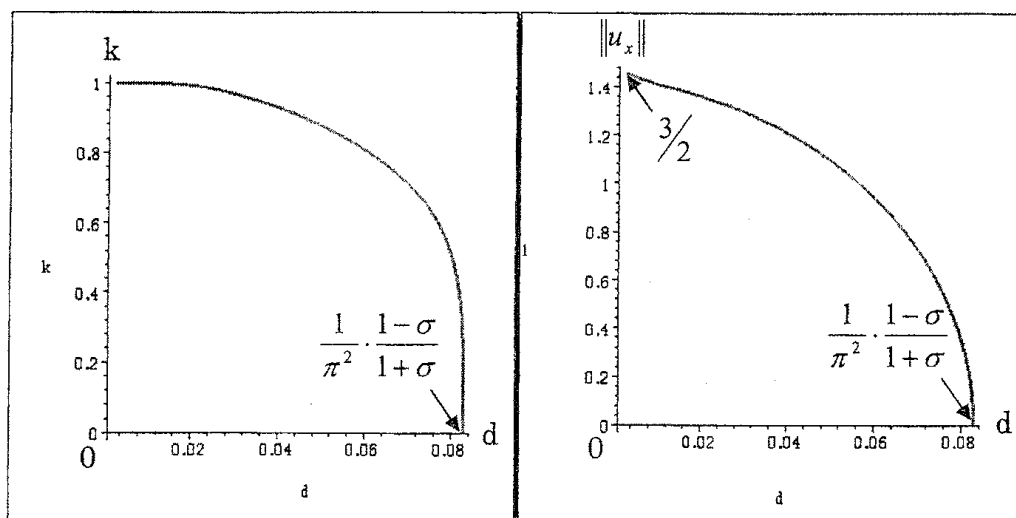
前定理より,  $\sigma$  を固定したときの方程式 (S) の解の大域的分岐構造は,  $\sigma(d, k) = \sigma$  となる等高線よりわかる. なお, 解の分岐の様子を見るため, 大域的分岐図を  $d - \|u_x\|$  平面に描いたものも並べて示す. ただし,  $\|u_x\| := u(1) - u(0)$  である.

【定理 2】  $\sigma(d, k) = \sigma$  とする.

(1)  $0 < \sigma < 5/6$  の場合 :

$$d = d_+(k; \sigma) \text{ for } k \in (0, 1). \quad d_+(0; \sigma) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1-\sigma}{1+\sigma},$$

$d_+(k; \sigma)$  は単調減少,  $d_+(k; \sigma) \rightarrow 0$  as  $k \uparrow 1$ .



$d-k$  平面

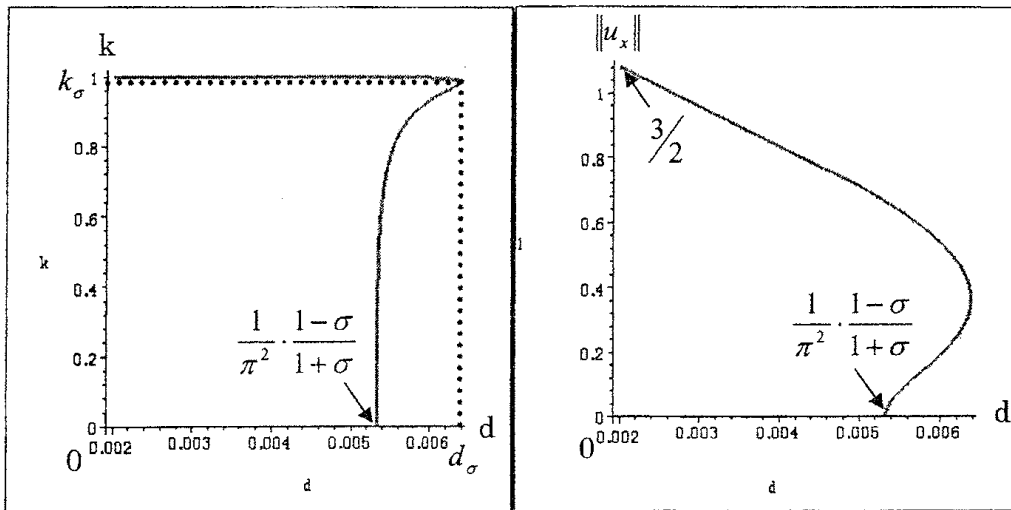
$d - \|u_x\|$  平面

(2)  $5/6 < \sigma < 1$  の場合 :

$$d = d_+(k; \sigma) \text{ for } k \in (0, 1). \quad d_+(0; \sigma) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1-\sigma}{1+\sigma},$$

$d_+(k; \sigma)$  は,  $0 < k < k_\sigma$  のとき単調増加,  $k = k_\sigma$  のとき最大値  $d_\sigma$ ,

$k_\sigma < k < 1$  のとき単調減少,  $d_+(k; \sigma) \rightarrow 0$  as  $k \uparrow 1$ .



$d-k$  平面

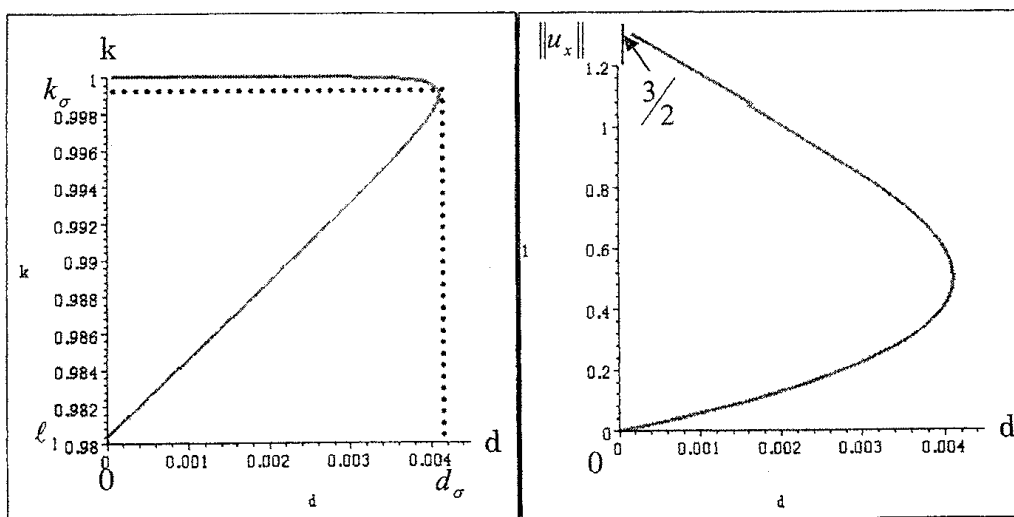
$d-\|u_x\|$  平面

(3)  $\sigma=1$  の場合 :

$d = d_+(k; \sigma)$  for  $k \in (\ell_1, 1)$ .  $d_+(\ell_1; \sigma) = 0$ ,

$d_+(k; \sigma)$  は,  $\ell_1 < k < k_\sigma$  のとき単調増加,  $k = k_\sigma$  のとき最大値  $d_\sigma$ ,

$k_\sigma < k < 1$  のとき単調減少,  $d_+(k; \sigma) \rightarrow 0$  as  $k \uparrow 1$ .



$d-k$  平面

$d-\|u_x\|$  平面

(4)  $\sigma > 1$  の場合：次の 2 つの曲線の和集合である．

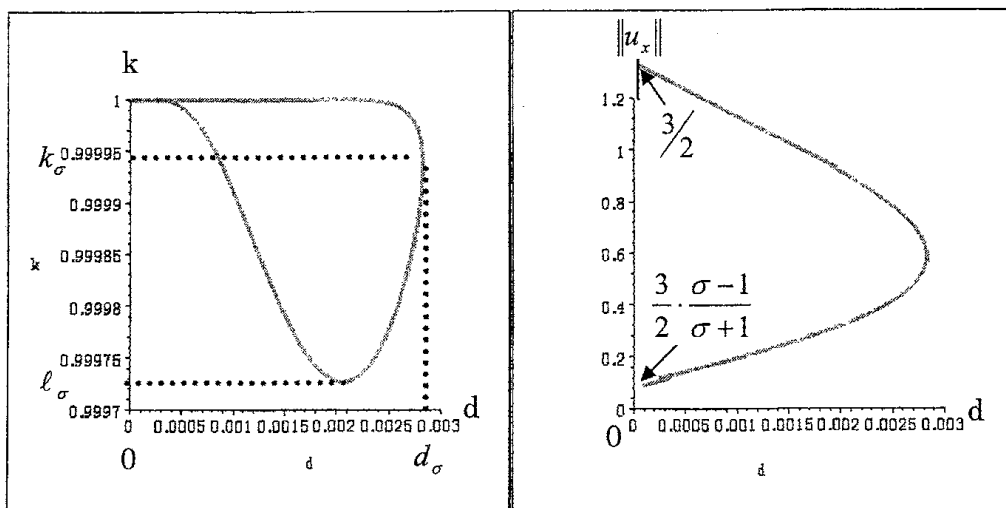
- $d = d_+(k; \sigma)$  for  $k \in (\ell_\sigma, 1)$ .  $d_+(\ell_\sigma; \sigma) = d_-(\ell_\sigma; \sigma) > 0$ ,

$d_+(k; \sigma)$  は,  $\ell_\sigma < k < k_\sigma$  のとき単調増加,  $k = k_\sigma$  のとき最大値  $d_\sigma$ ,

$k_\sigma < k < 1$  のとき単調減少,  $d_+(k; \sigma) \rightarrow 0$  as  $k \uparrow 1$ .

- $d = d_-(k; \sigma)$  for  $k \in (\ell_\sigma, 1)$ .  $d_-(\ell_\sigma; \sigma) = d_+(\ell_\sigma; \sigma) > 0$ ,

$d_-(k; \sigma)$  は単調減少,  $d_-(k; \sigma) \rightarrow 0$  as  $k \uparrow 1$ .



$d-k$  平面

$d-\|u_x\|$  平面

ただし,

$$d_\pm = \frac{\sigma \{K(k)(2-k^2) - 3E(k)\} \pm \sqrt{D_\sigma}}{4K(k)^3(1-k^2+k^4)(1+\sigma)},$$

$$D_\sigma = ((3-3k^2)K(k)^2 + (6k^2-12)E(k)K(k) + 9E(k)^2)\sigma^2 + (1-k^2+k^4)K(k)^2,$$

$\ell_\sigma :=$  the unique solution of  $D_\sigma = 0$  in  $k \in (0,1)$ ,

$k_\sigma :=$  the unique solution of

$$\begin{aligned} &((-3k^6 + 9k^4 - 9k^2 + 3)\sigma^2 + k^8 - 6k^6 + 13k^4 - 12k^2 + 4)K(k)^4 \\ &+ ((18k^6 - 72k^4 + 90k^2 - 36)\sigma^2 - 4k^8 + 16k^6 - 24k^4 + 20k^2 - 8)E(k)K(k)^3 \\ &+ ((-36k^6 + 126k^4 - 180k^2 + 90)\sigma^2 + 4k^8 - 8k^6 + 12k^4 - 8k^2 + 4)E(k)^2K(k)^2 \\ &+ ((24k^6 - 90k^4 + 126k^2 - 84)\sigma^2)E(k)^3K(k) \\ &+ ((27k^4 - 27k^2 + 27)\sigma^2)E(k)^4 = 0 \text{ in } k \in (0,1), \end{aligned}$$

$$d_\sigma := d_+(k_\sigma; \sigma).$$

高木[3]は、2 次分岐が起こらないとするならば、上図の  $d-\|u_x\|$  平面における分岐図のような状況であろうと予想していた. 定理 2 より 2 次分岐は起こらず、予想通りであったということを示すことができる. 正確に述べると、解の個数に関する次の結果を得る.

【定理 3】 方程式(S)の解の個数は次の通りである.

(1)  $0 < \sigma < 5/6$  の場合 :

- $d > \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1-\sigma}{1+\sigma}$  のとき、解は存在しない.
- $0 < d \leq \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1-\sigma}{1+\sigma}$  のとき、解はただ 1 つ存在する.

(2)  $5/6 < \sigma < 1$  の場合 :

- $d > d_\sigma$  のとき、解は存在しない.
- $d = d_\sigma$  のとき、解はただ 1 つ存在する.
- $\frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \leq d < d_\sigma$  のとき、解はちょうど 2 個存在する.
- $0 < d < \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1-\sigma}{1+\sigma}$  のとき、解はただ 1 つ存在する.

(3)  $\sigma = 1$  の場合 :

- $d > d_\sigma$  のとき、解は存在しない.
- $d = d_\sigma$  のとき、解はただ 1 つ存在する.
- $0 < d < d_\sigma$  のとき、解はちょうど 2 個存在する.

(4)  $\sigma > 1$  の場合 :

- $d > d_\sigma$  のとき、解は存在しない.
- $d = d_\sigma$  のとき、解はただ 1 つ存在する.
- $0 < d < d_\sigma$  のとき、解はちょうど 2 個存在する.

ただし、 $d_\sigma$  は定理 2 の中で定義されたものである.

## 参考文献

- [1] A.Gierer and H.Meinhardt, A theory of biological pattern formation, Kybernetik (Berlin), 12 (1972), 30-39.
- [2] Y.Lou, W.-M.Ni and S.Yotsutani, On a limiting system in the Lotka-Volterra competition with cross diffusion, Discrete Contin. Dyn. Syst., 10 (2004), 435-458.
- [3] I.Takagi, Point-condensation for a reaction-diffusion system, J. Differential Equations 61 (1986), 208-249.